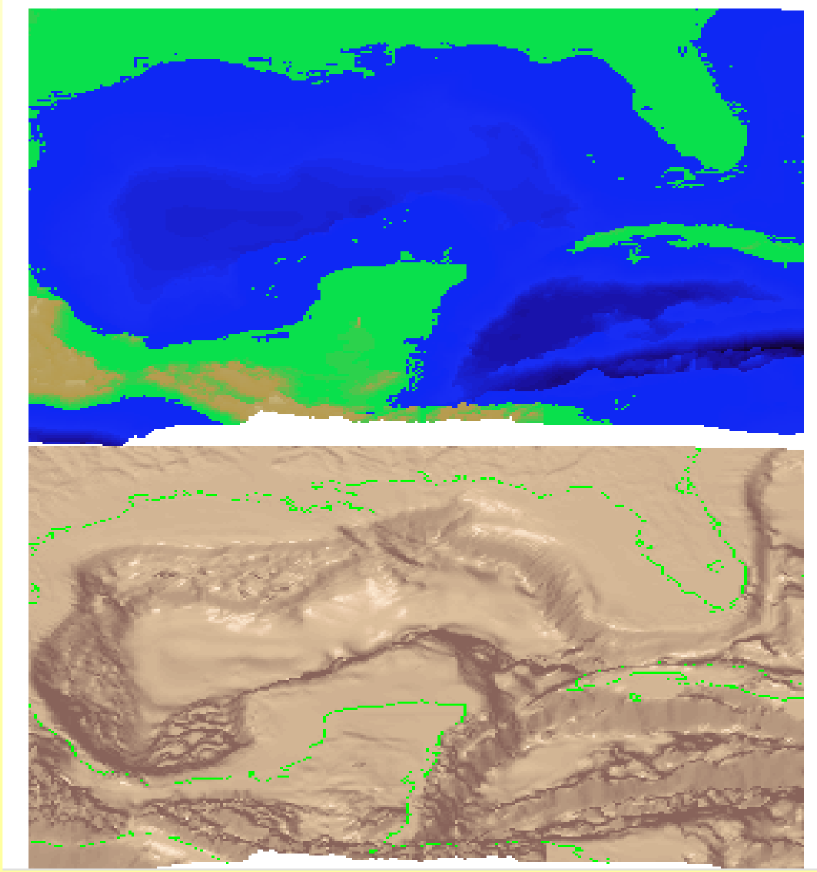
Aula 7 - Representação e Descrição de Estruturas Bi-dimensionais



Prof. Adilson Gonzaga

Extração de Características

Descritores

Introdução

Objetos ou Segmentos são representados como uma coleção de pixels em uma imagem.

Para o reconhecimento do objeto é necessário descrever as propriedades dos grupos de pixels.

A descrição é muitas vezes apenas um conjunto de números que são chamados de

"descritores do objeto".

Extração de Características

Segmentos (agrupamento de píxels) ou Objetos de uma imagem possuem fundamentalmente as propriedades relativas a:

- Forma
- Cor
- Textura

A medida de qualquer destas propriedades é denominada de Característica ou Descritor de Imagem.

Estas características podem formar um vetor de escalares, denominado **Vetor Descritor de imagem ou Vetor de Características.**

Extração de Características para a Visão Computacional

Imagem Digital → Processamento de Imagem → Extração de Características → Reconhecimento

4
1200
Chapéu
Vermelho
220
0,34
10
Cabelo
Preto
Mulher
2,3456
98,9
1
0
1100110

LENNA

Vetor de Características ou
Vetor Descritor de Imagem

Descritores

Pode-se reconhecer objetos comparando-se simplesmente os descritores de objetos em uma imagem com os descritores de objetos conhecidos.

Os descritores devem ter quatro propriedades importantes.

1) Devem definir um conjunto completo.

Dois objetos devem ter os mesmos descritores se e somente se eles tiverem as mesmas características.

Descritores

2) Devem ser congruentes.

Deve-se reconhecer objetos como similares quando estes objetos têm descritores semelhantes.

3) Devem ter propriedades invariantes.

Deve ser possível reconhecer objetos independente de rotação, escala, posição e também de transformações afim [“affine”(Ax + b)] e perspectiva.

4) Devem ser um conjunto compacto.

Um conjunto de descritores deve representar a essência de um objeto de maneira eficiente.

Descritores

- Após a segmentação, os agrupamentos resultantes são usualmente representados e descritos em um formato apropriado para o Reconhecimento

$$\text{Imagem: } \begin{cases} \text{Fronteiras} \\ \\ \text{Regiões} \end{cases}$$

- Uma fronteira pode ser descrita pelo seu tamanho, orientação, número de concavidades, etc...

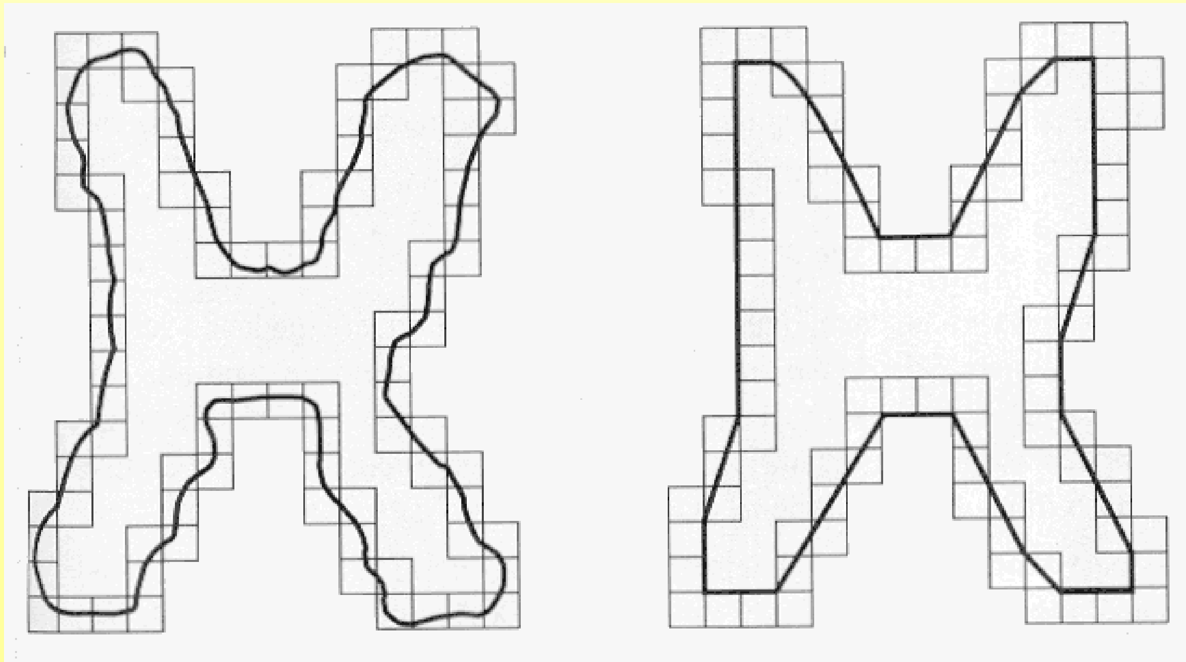
- Uma região pode ser descrita pela sua cor, textura, área, etc...

Representação e Descrição de Fronteiras

1) Aproximações Poligonais:

- Uma fronteira digital pode ser aproximada por um polígono

Polígono de Perímetro Mínimo:

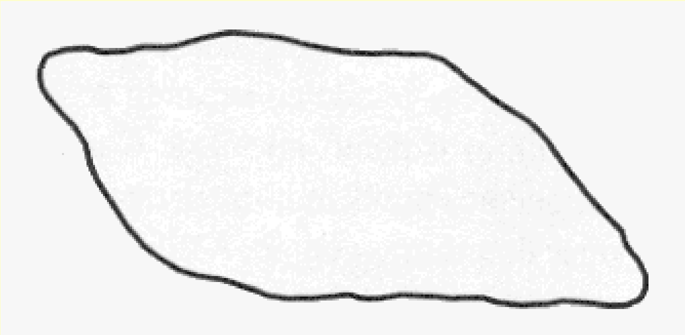


Define-se células que contenham a fronteira

O Polígono Mínimo é definido através da menor distância entre dois pontos concatenados.

Descritor: coordenadas dos vértices do polígono

Inscrição de Polígono Convexo:

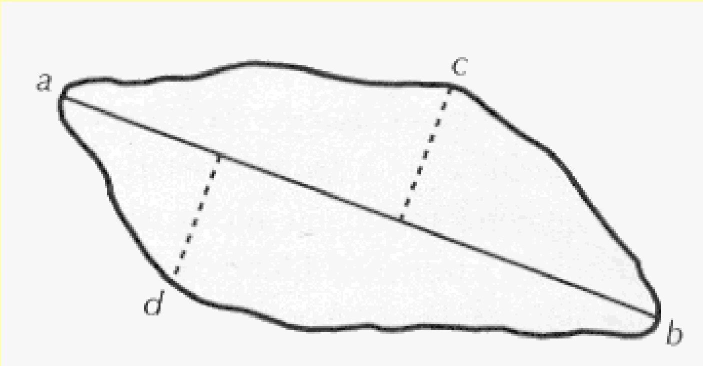


Fronteira Original Convexa

Determinar a maior distância entre dois pontos da fronteira (a-b)

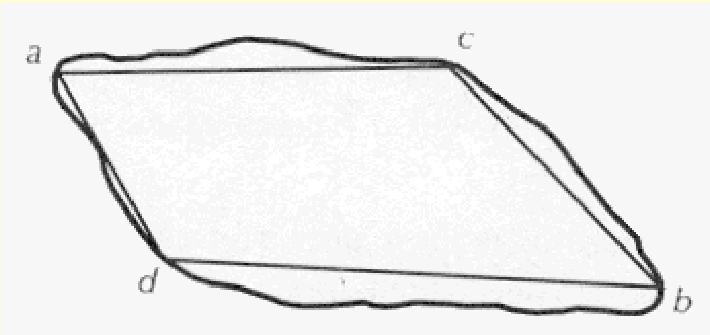
Determinar a maior distância da perpendicular superior (c)

Determinar a maior distância da perpendicular inferior (d)

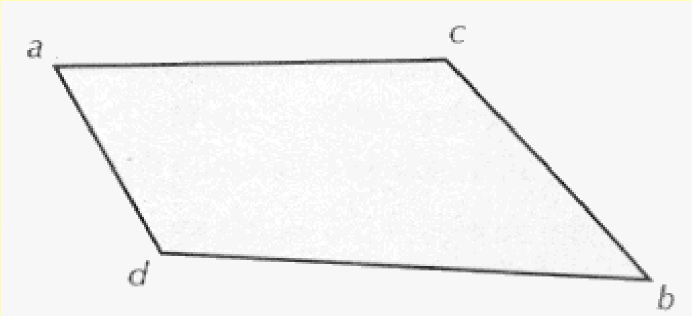


Estabelecer um nível de Limiar para o comprimento da perpendicular, definindo o número de pontos do polígono.

Inscrição de Polígono Convexo:



Inscrever o Polígono através da união dos pontos da fronteira determinados (a,b,c,d)



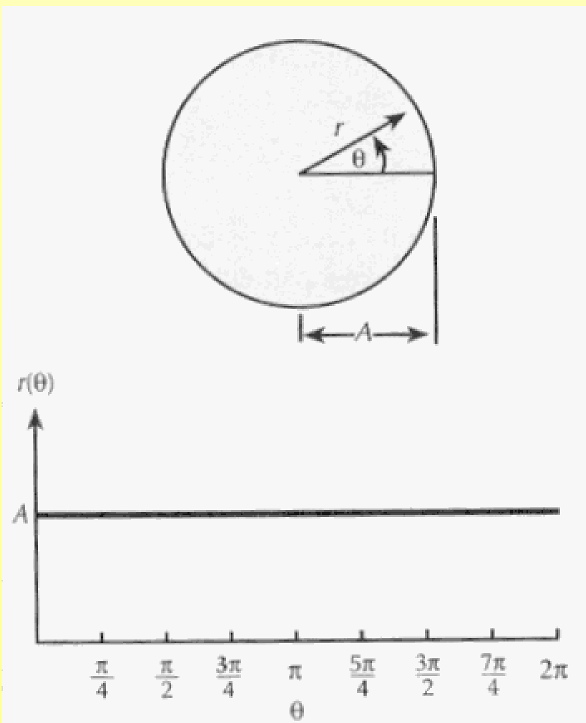
A Fronteira é então descrita através dos pontos que formam os vértices do Polígono inscrito (a,b,c,d, ...)

2) Assinaturas:

- Representação unidimensional de uma fronteira.

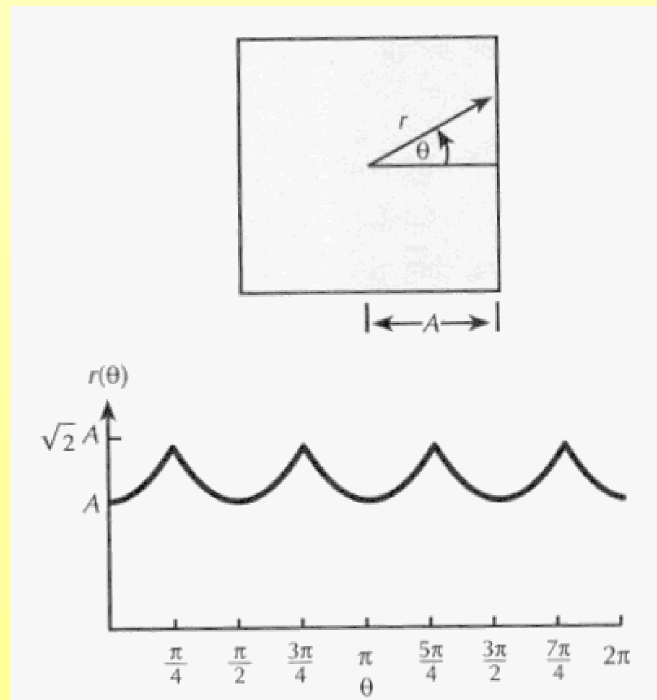
Exemplos:

1) Gráfico da Distância versus Ângulo:



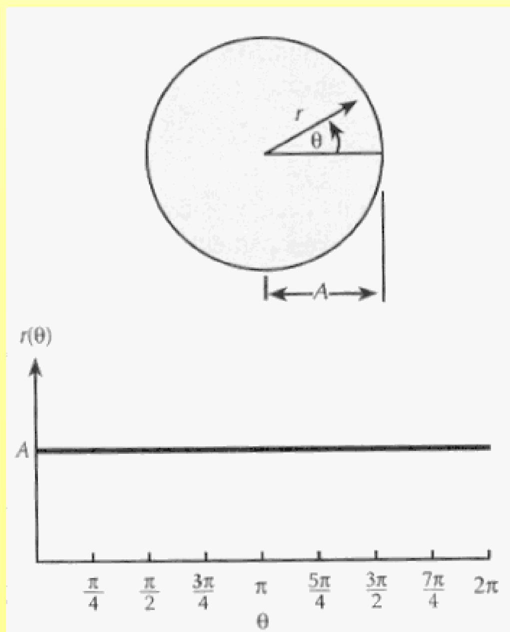
Descritor

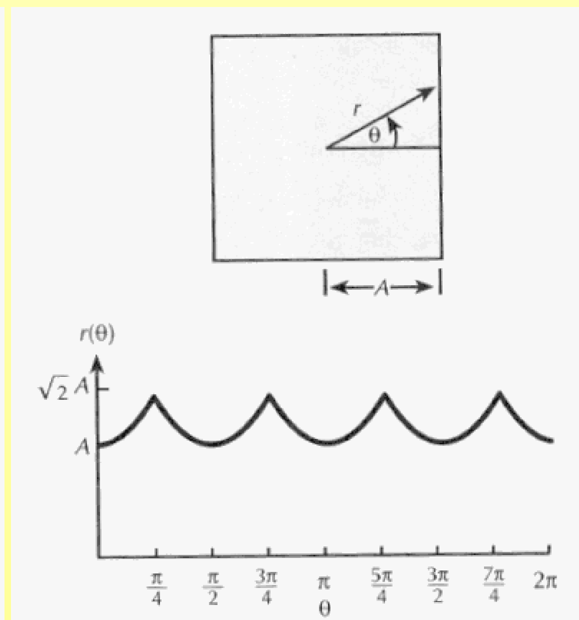
$$r(\theta)=\begin{pmatrix} r(0) \\ r(\pi/4) \\ r(\pi/2) \\ r(3\pi/4) \\ r(\pi) \\ r(5\pi/4) \\ r(3\pi/2) \\ r(7\pi/4) \\ r(2\pi) \end{pmatrix}$$



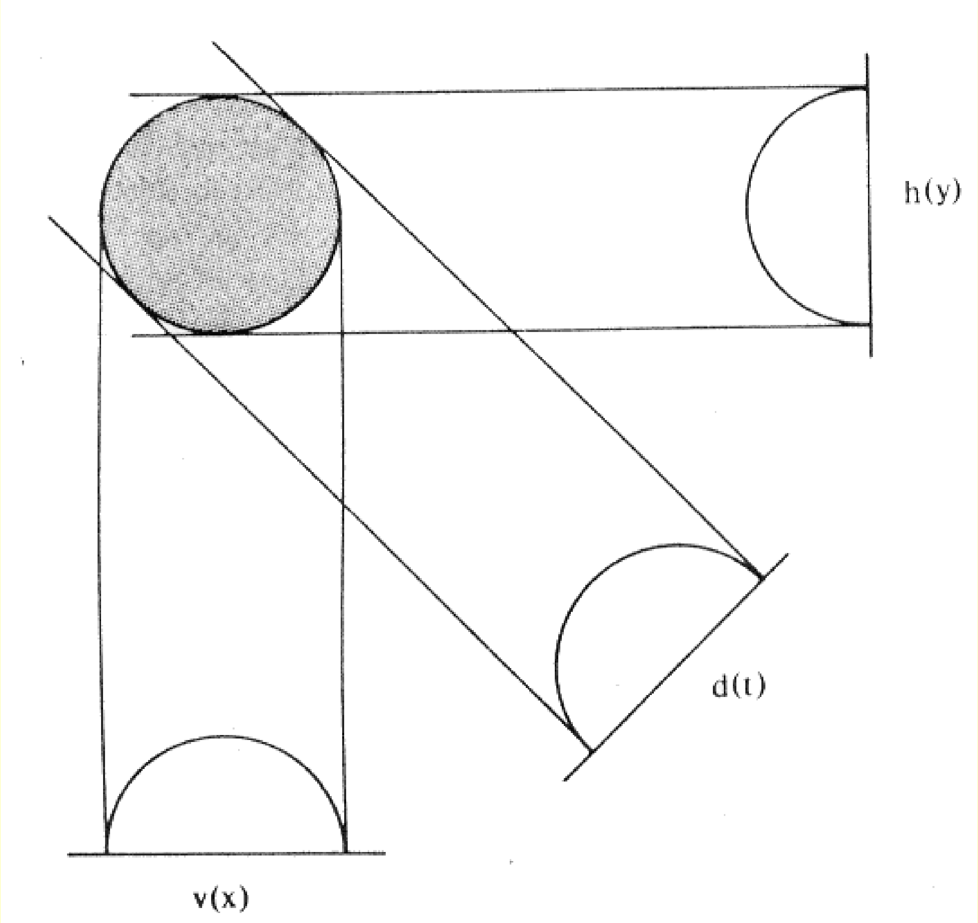
Descritor da Assinatura

$$r(\theta)=\begin{pmatrix} r(0)\\ r(\pi/4)\\ r(\pi/2)\\ r(3\pi/4)\\ r(\pi)\\ r(5\pi/4)\\ r(3\pi/2)\\ r(7\pi/4)\\ r(2\pi)\end{pmatrix} \qquad r(\theta)=\begin{pmatrix} A\\ A\\ A\\ A\\ A\\ A\\ A\\ A\\ A\end{pmatrix} \qquad r(\theta)=\begin{pmatrix} A\\ \sqrt{2}A\\ A\\ \sqrt{2}A\\ A\\ \sqrt{2}A\\ A\\ \sqrt{2}A\\ A\end{pmatrix}$$





2) Assinatura por Projeções: (Fronteiras ou Regiões)



Assinatura Vertical

$$h(y) = \sum_{y} f(x, y)$$

Assinatura Horizontal

$$v(x) = \sum_{x} f(x, y)$$

Assinatura Diagonal

$$d(t) = \sum_{t} f(x, y)$$

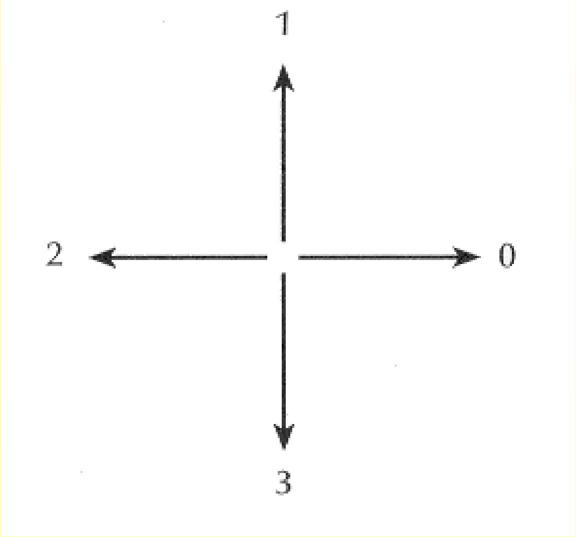
O Vetor de Características pode ser formado por uma, duas ou as três assinaturas concatenadas.

3) Código da Cadeia:

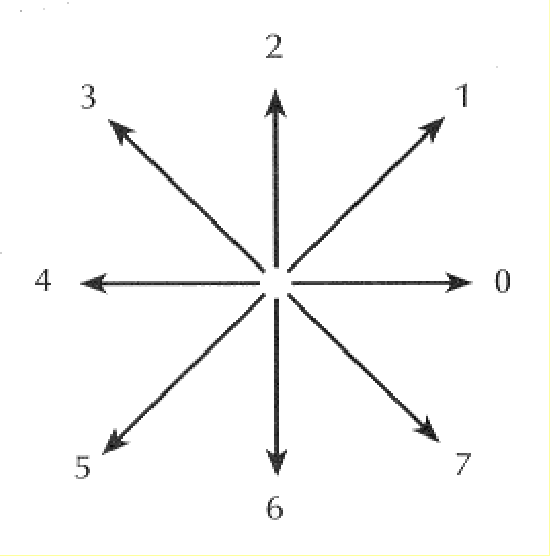
("Chain Code" ou Código de Freeman)

- Representam uma fronteira através de uma seqüência conectada de segmentos, de direção e comprimento definidos.

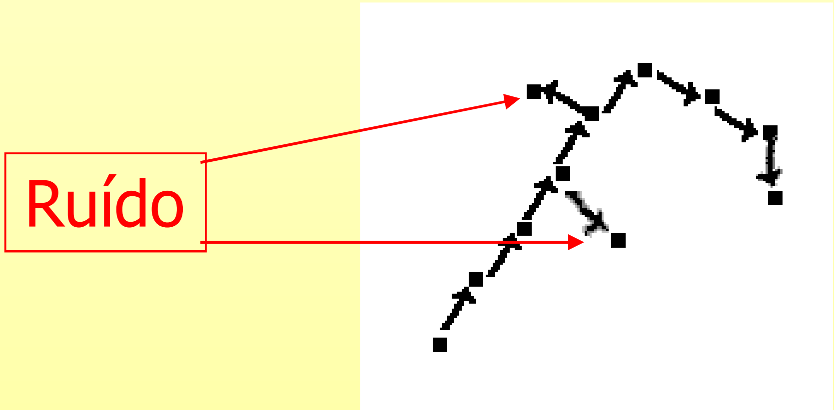
Código de 4 direções



Código de 8 direções

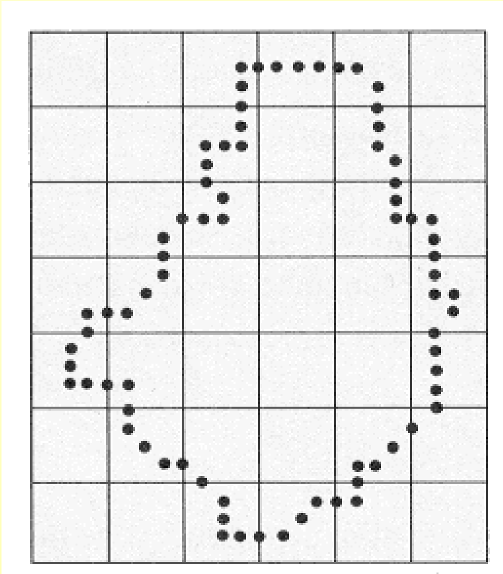


❑ Se a representação da fronteira for feita a cada par de píxels o custo computacional é alto e torna-se mais susceptível a ruídos.

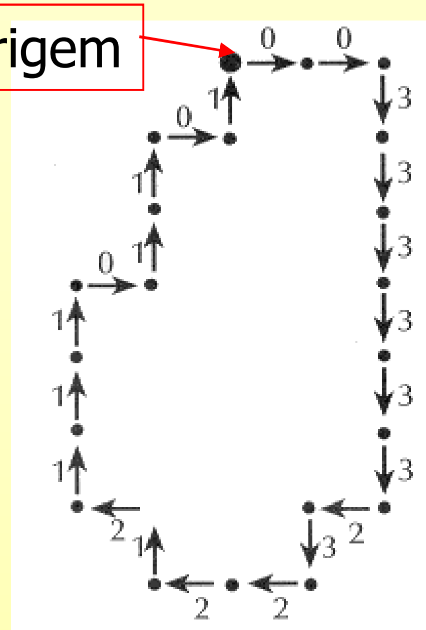


❑ Re-amostrar a fronteira através de uma grade mais larga, e atribuir um ponto a cada nó da grade mais próximo da fronteira que a atravesse.

Imagem

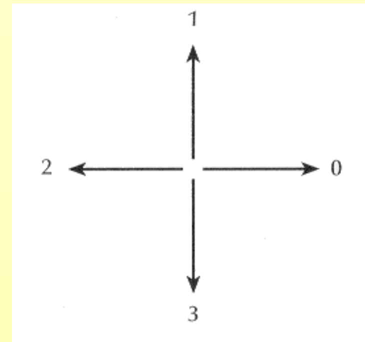


Origem

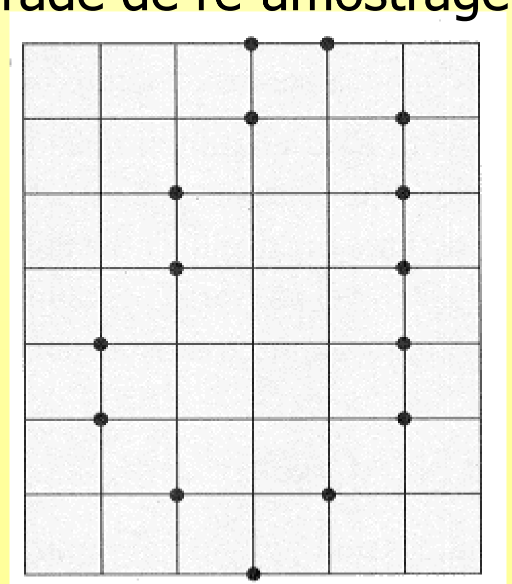


Código de 4 direções:

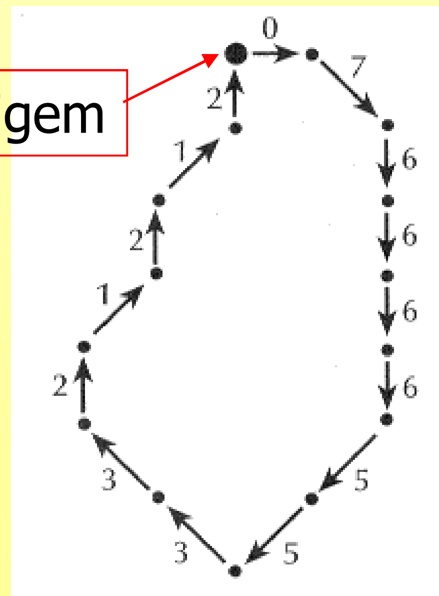
00333333232221211101101



Grade de re-amostragem

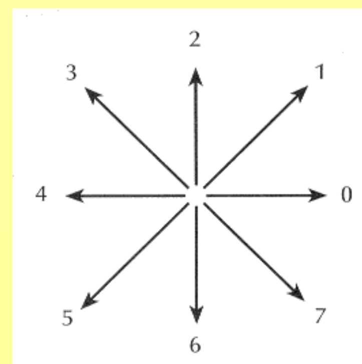


Origem



Código de 8 direções:

076666553321212



Normalização do Código da Cadeia:

- O Código da Cadeia de uma dada fronteira depende de uma Origem.

- A solução é normalizar o código para que independa da origem.

Primeira Diferença ou Derivativo do Código da Cadeia:

Invariante com relação à Rotação.

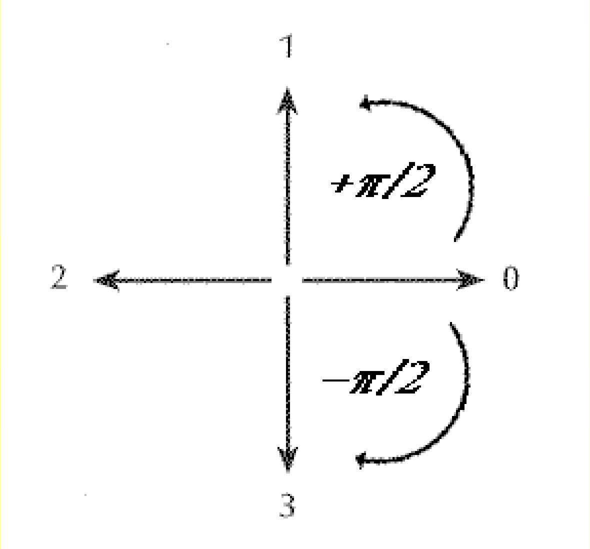
Primeira Diferença ou Derivativo do Código da Cadeia:

Método:

1. Considerar o Código da Cadeia de forma “circular”, ou seja, fechado em suas extremidades.

2. Montar o Código Derivativo de acordo com:

4 direções



$$0 \Rightarrow 1 = \frac{\pi}{2} = 1$$

$$1 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

$$1 \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{2} = 1$$

$$2 \Rightarrow 1 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

$$2 \Rightarrow 3 = \frac{\pi}{2} = 1$$

$$3 \Rightarrow 2 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

$$3 \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2} = 1$$

$$0 \Rightarrow 3 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

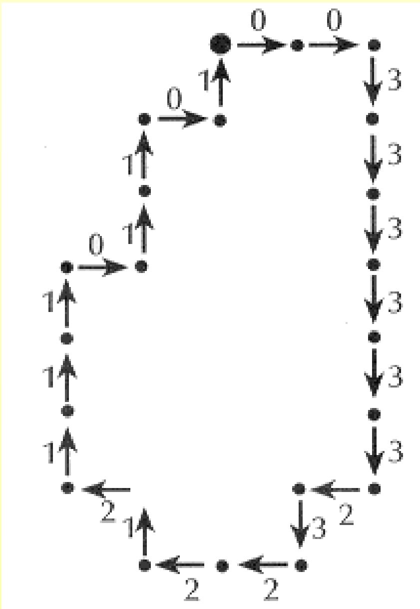
$$0 \Rightarrow 0 = 0$$

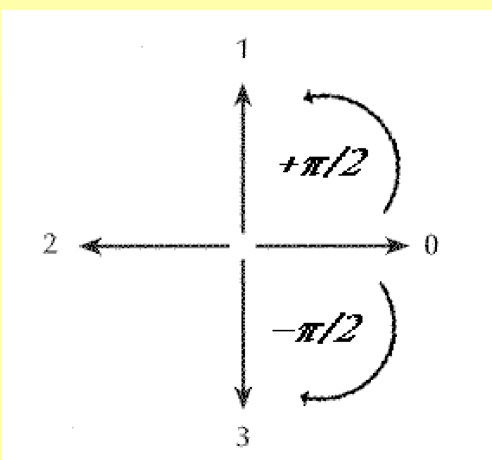
$$1 \Rightarrow 1 = 0$$

$$2 \Rightarrow 2 = 0$$

$$3 \Rightarrow 3 = 0$$

Exemplo:





Código da Cadeia:

00333333232221211101101

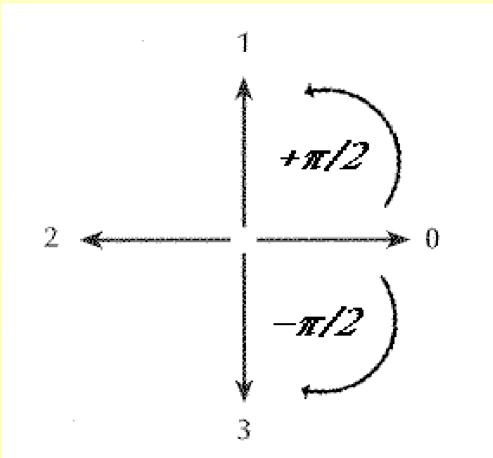
$$1 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} = 3$$

Código Derivativo:

3 0 3 0 0 0 0 0 3 1 3 0 3 1 3 0 0 3 1 0 3 1

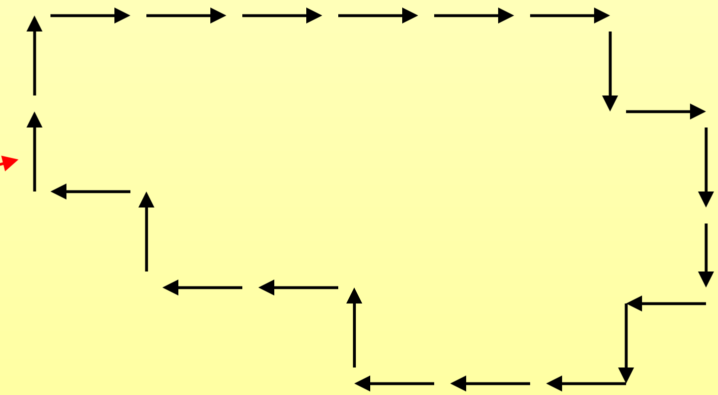
Exemplo:

$$\boxed{3\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 1\ 3\ 0\ 3\ 1\ 3\ 0\ 0\ 3\ 1\ 0\ 3\ 1}$$

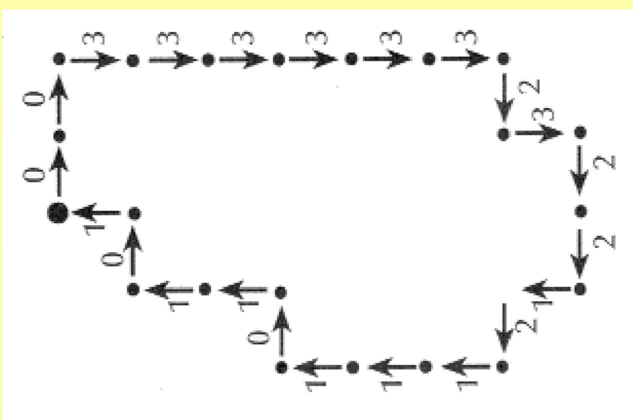


$3 \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Virar à Direita 90º

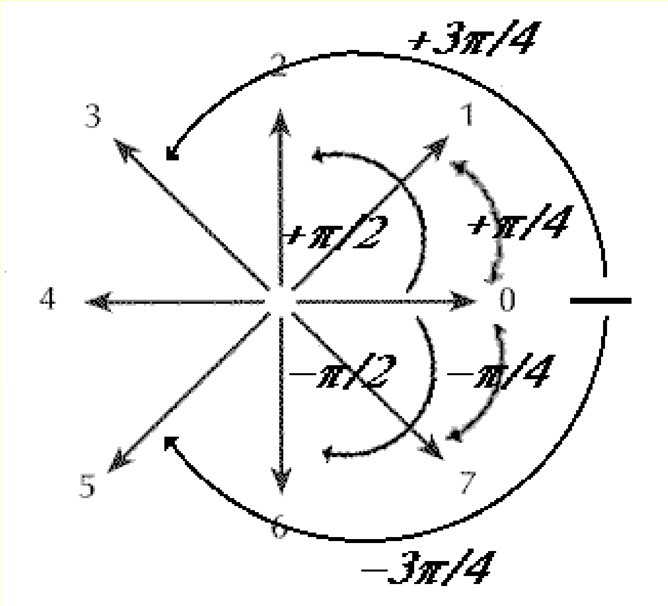
$1 \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Virar à Esquerda 90º



Direção arbitrária
(3)



Código Derivativo de 8 Direções:



$$0 \Rightarrow 1 = \frac{\pi}{4} = 1$$

$$1 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{4} = 7$$

$$0 \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{2} = 2$$

$$2 \Rightarrow 0 = -\frac{\pi}{2} = 6$$

$$0 \Rightarrow 3 = \frac{3\pi}{4} = 3$$

$$3 \Rightarrow 0 = -\frac{3\pi}{4} = 5$$

$$0 = (0 \Rightarrow 0)(1 \Rightarrow 1)(2 \Rightarrow 2)(3 \Rightarrow 3)(4 \Rightarrow 4)(5 \Rightarrow 5)(6 \Rightarrow 6)(7 \Rightarrow 7)$$

$$1 = (0 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 2)(2 \Rightarrow 3)(3 \Rightarrow 4)(4 \Rightarrow 5)(5 \Rightarrow 6)(6 \Rightarrow 7)(7 \Rightarrow 0)$$

$$2 = (0 \Rightarrow 2)(1 \Rightarrow 3)(2 \Rightarrow 4)(3 \Rightarrow 5)(4 \Rightarrow 6)(5 \Rightarrow 7)(6 \Rightarrow 0)(7 \Rightarrow 1)$$

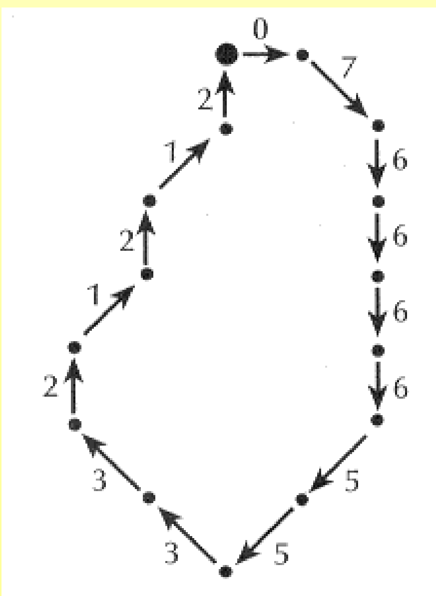
$$3 = (0 \Rightarrow 3)(1 \Rightarrow 4)(2 \Rightarrow 5)(3 \Rightarrow 6)(4 \Rightarrow 7)(5 \Rightarrow 0)(6 \Rightarrow 1)(7 \Rightarrow 2)$$

$$7 = (0 \Rightarrow 7)(1 \Rightarrow 0)(2 \Rightarrow 1)(3 \Rightarrow 2)(4 \Rightarrow 3)(5 \Rightarrow 4)(6 \Rightarrow 5)(7 \Rightarrow 6)$$

$$6 = (0 \Rightarrow 6)(1 \Rightarrow 7)(2 \Rightarrow 0)(3 \Rightarrow 1)(4 \Rightarrow 2)(5 \Rightarrow 3)(6 \Rightarrow 4)(7 \Rightarrow 5)$$

$$5 = (0 \Rightarrow 5)(1 \Rightarrow 6)(2 \Rightarrow 7)(3 \Rightarrow 0)(4 \Rightarrow 1)(5 \Rightarrow 2)(6 \Rightarrow 3)(7 \Rightarrow 4)$$

$$0 = (0 \Rightarrow 0)(1 \Rightarrow 1)(2 \Rightarrow 2)(3 \Rightarrow 3)(4 \Rightarrow 4)(5 \Rightarrow 5)(6 \Rightarrow 6)(7 \Rightarrow 7)$$
$$1 = (0 \Rightarrow 1)(1 \Rightarrow 2)(2 \Rightarrow 3)(3 \Rightarrow 4)(4 \Rightarrow 5)(5 \Rightarrow 6)(6 \Rightarrow 7)(7 \Rightarrow 0)$$
$$2 = (0 \Rightarrow 2)(1 \Rightarrow 3)(2 \Rightarrow 4)(3 \Rightarrow 5)(4 \Rightarrow 6)(5 \Rightarrow 7)(6 \Rightarrow 0)(7 \Rightarrow 1)$$
$$3 = (0 \Rightarrow 3)(1 \Rightarrow 4)(2 \Rightarrow 5)(3 \Rightarrow 6)(4 \Rightarrow 7)(5 \Rightarrow 0)(6 \Rightarrow 1)(7 \Rightarrow 2)$$
$$7 = (0 \Rightarrow 7)(1 \Rightarrow 0)(2 \Rightarrow 1)(3 \Rightarrow 2)(4 \Rightarrow 3)(5 \Rightarrow 4)(6 \Rightarrow 5)(7 \Rightarrow 6)$$
$$6 = (0 \Rightarrow 6)(1 \Rightarrow 7)(2 \Rightarrow 0)(3 \Rightarrow 1)(4 \Rightarrow 2)(5 \Rightarrow 3)(6 \Rightarrow 4)(7 \Rightarrow 5)$$
$$5 = (0 \Rightarrow 5)(1 \Rightarrow 6)(2 \Rightarrow 7)(3 \Rightarrow 0)(4 \Rightarrow 1)(5 \Rightarrow 2)(6 \Rightarrow 3)(7 \Rightarrow 4)$$



Código da Cadeia:

07666655332121 2

$$2 \Rightarrow 0 = 6$$

Código Derivativo:

6 7 7 0 0 0 7 0 6 0 7 7 1 7 1

O Código da Cadeia ou seu Derivativo produz um Descritor de Fronteira

Descritores de Fronteiras

1) Comprimento da Fronteira (Perímetro):

- Contagem do número de píxels da Fronteira.

❑ Usando o Código da Cadeia:

- de 4 direções ⇒ Número de elementos.

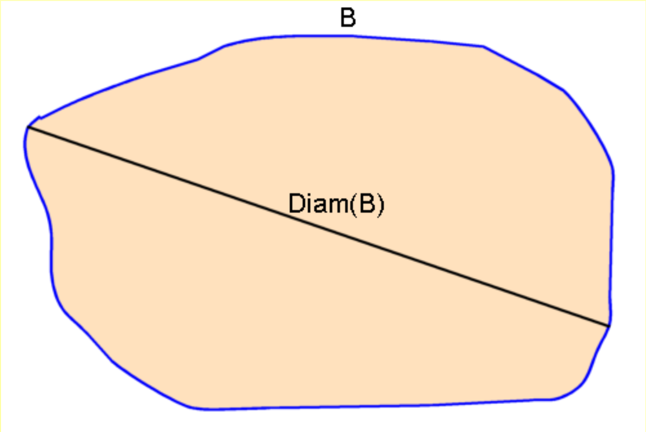
- de 8 direções ⇒ Número de elementos pares (horizontais e verticais) mais $\sqrt{2}$ x (número de elementos ímpares) elementos diagonais.

2) Diâmetro da Fronteira:

$$\boxed{Diam(B) = \max_{i,j}\left[D(p_i, p_j)\right]}$$

Onde: $D(p_i, p_j)$ É a distância entre os píxels i e j sobre a Fronteira B.

- O valor do Diâmetro e a orientação da linha que conecta os dois pontos da fronteira mais distantes são descritores úteis da fronteira.



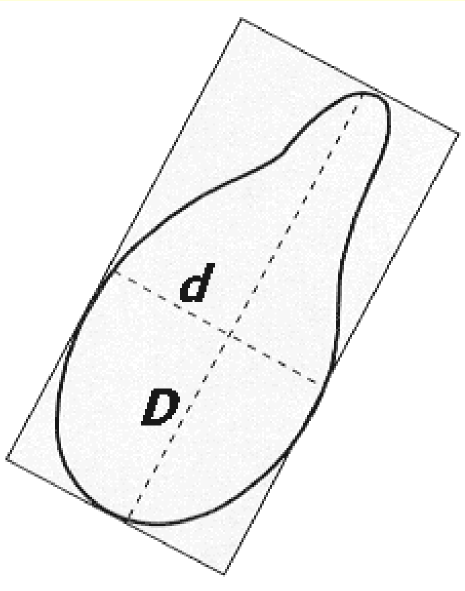
- Esta linha é também chamada de **Eixo Maior** da fronteira.

3) Excentricidade da Fronteira:

- É a razão entre o **Eixo Maior** (D) e o **Eixo Menor** (d) da fronteira.

$$E = \frac{D}{d}$$

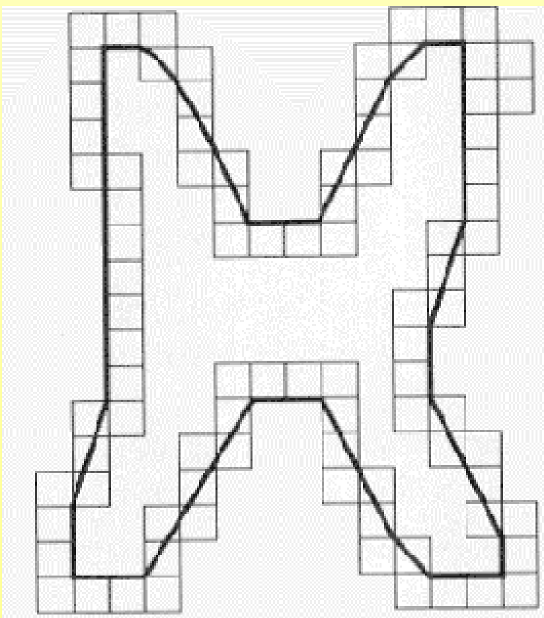
- **Eixo Menor** é a maior distância entre dois pontos da fronteira B sobre uma perpendicular ao **Eixo Maior**.



4) Curvatura:

❑ A Curvatura é definida pela taxa de mudança da inclinação.

❑ Pode-se utilizar a diferença entre as inclinações de segmentos adjacentes de fronteiras que tenham sido representadas por segmentos de retas.



❑ À medida que a fronteira é atravessada no sentido horário, a inclinação de cada segmento pode fornecer a descrição de partes côncavas ou convexas.

❑ A direção do gradiente também pode ser utilizada como descritor de curvatura.

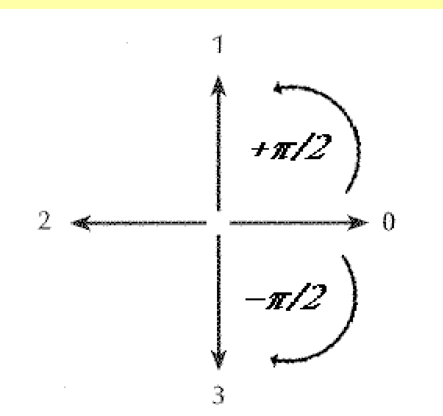
5) Número do Formato:

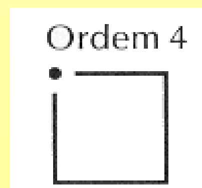
("Shape Numbers")

❑ Utilizando o Código da Cadeia de 4 direções, o Número do Formato da fronteira é definido como " o menor número formado pela primeira diferença (Código Derivativo) " através da Rotação do Derivativo.

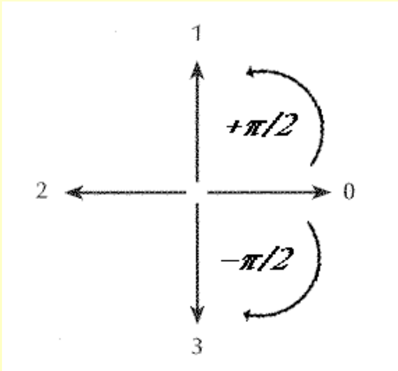
❑ A " Ordem n " do Número do Formato é definida como o número de dígitos para representá-lo.

- n é par para fronteiras fechadas

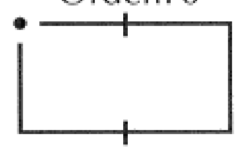




Código da Cadeia:	0 3 2 1
Derivativo:	3 3 3 3
Número do Formato:	3 3 3 3

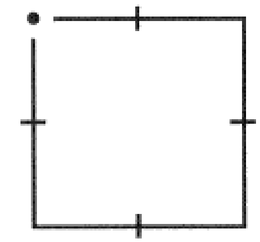


Ordem 6

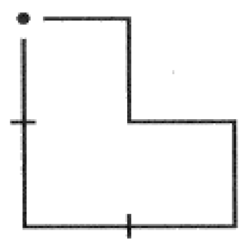


Código da Cadeia:	0	0	3	2	2	1
Derivativo:	3	0	3	3	0	3
Número do Formato:	0	3	3	0	3	3

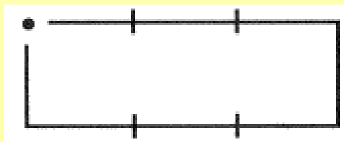
Ordem 8



Código da Cadeia:	0	0	3	3	2	2	1	1
Derivativo:	3	0	3	0	3	0	3	0
Número do Formato:	0	3	0	3	0	3	0	3

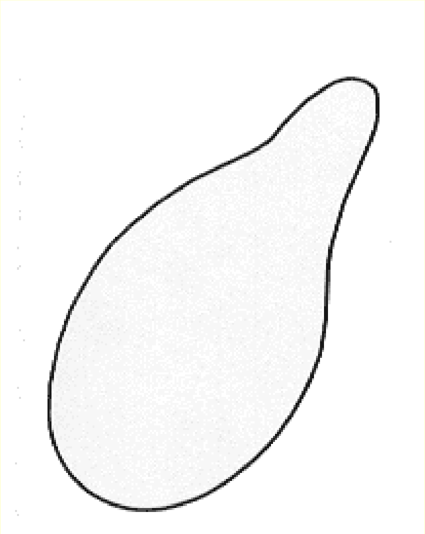


Código da Cadeia:	0	3	0	3	2	2	1	1
Derivativo:	3	3	1	3	3	0	3	0
Número do Formato:	0	3	0	3	3	1	3	3

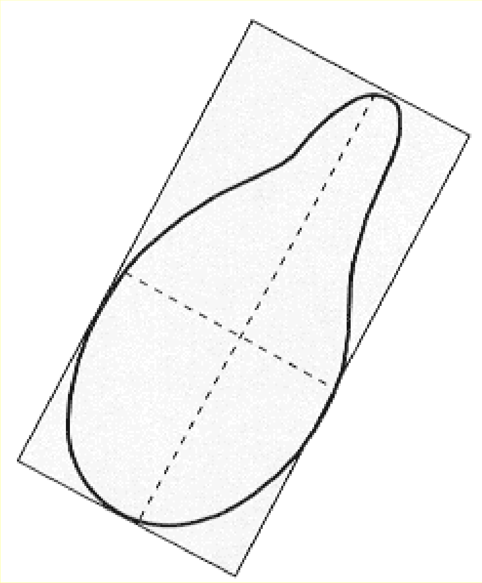


Código da Cadeia:	0	0	0	3	2	2	2	1
Derivativo:	3	0	0	3	3	0	0	3
Número do Formato:	0	0	3	3	0	0	3	3

Geração do Número do Formato:



1. Dada a Fronteira que se quer determinar seu Número do Formato, localizar o Eixo Maior e o Eixo Menor.



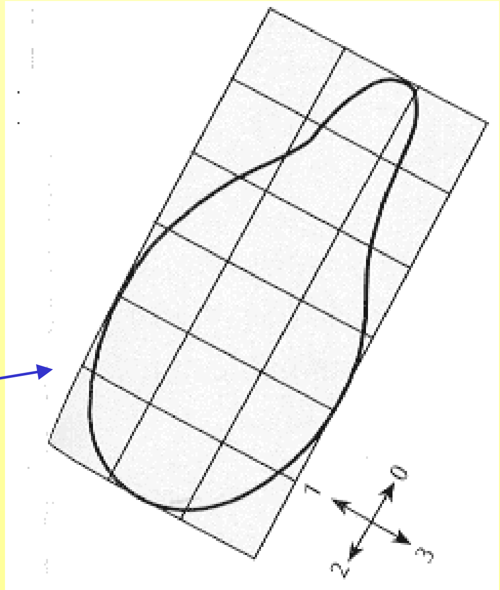
2. Definir o **Retângulo Básico** que envolve a fronteira, baseado nos dois eixos localizados.

3. Aproximar o retângulo que envolve a fronteira através de um retângulo cuja Excentricidade (E) melhor aproxima a do Retângulo Básico.

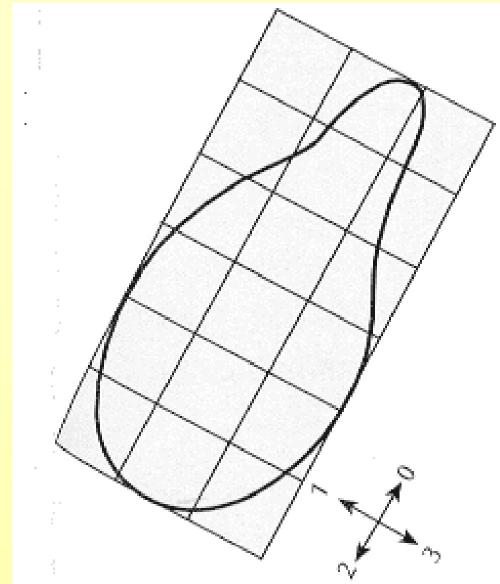
- Exemplo: Supondo-se que a ordem definida para o formato é n=18 e que a excentricidade medida foi E=2.

Todos os retângulos de ordem 18 (ou seja, aqueles cujo perímetro é 18, considerando o Código da Cadeia) são:

1 x 8 ⇨	E=8
2 x 7 ⇨	E=3.5
3 x 6 ⇨	E=2
4 x 5 ⇨	E=1,25



4. Alinhar a direção do Código da Cadeia com a grade resultante e gerar os códigos e o Número do Formato equivalentes à fronteira.



Código da Cadeia:

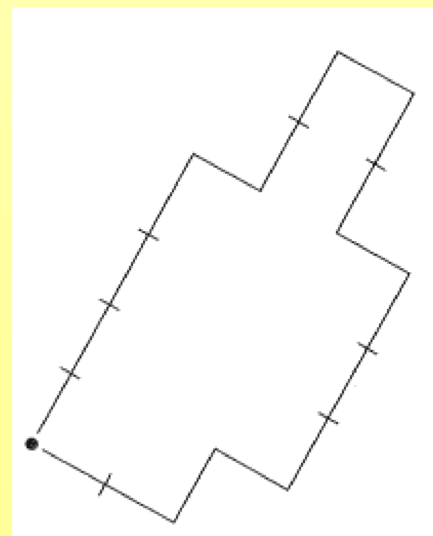
0 0 0 0 3 0 0 3 2 2 3 2 2 2 1 2 1 1

Derivativo:

3 0 0 0 3 1 0 3 3 0 1 3 0 0 3 1 3 0

Número do Formato:

0 0 0 3 1 0 3 3 0 1 3 0 0 3 1 3 0 3



Representação e Descrição de Regiões

1) Esqueleto de uma Região:

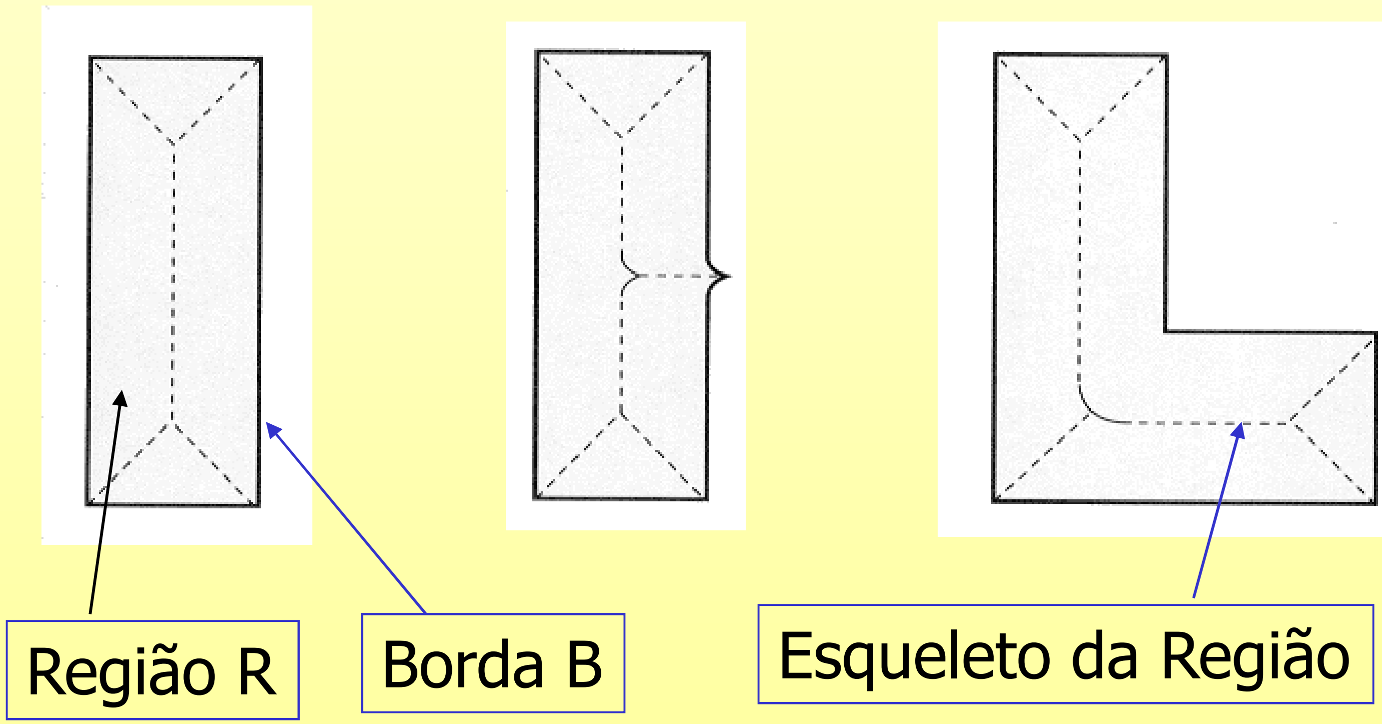
- Redução de uma região ao seu esqueleto, através de um algoritmo de afinamento ou esqueletização.

- O esqueleto de uma região pode ser definido pela Transformação do Eixo Médio (“Medial Axis Transform” - MAT).

- A MAT de uma região R com borda B é definida da seguinte forma:
  - Para cada ponto p em R, encontramos seu vizinho mais próximo em B.
  - Se p tiver mais de um vizinho desse tipo, então diz-se que ele pertence ao eixo médio (esqueleto) de R.

Exemplo:

Esqueleto de regiões considerando a Distância Euclidiana.



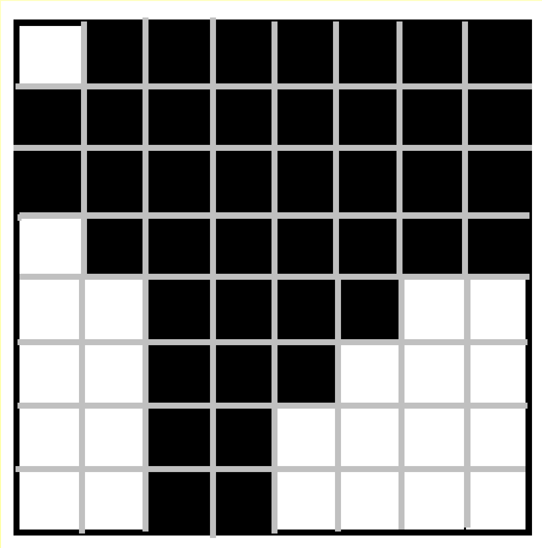
Os pontos do Esqueleto possuem pelo menos dois pontos em B de mesma Distância Euclidiana.

As coordenadas do Esqueleto de uma região, podem descrever a região.

2) Arranjo de Ocupação Espacial:

Arranjo de membros.

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{Se (x,y) pertence à Região} \\ 0 & \text{Caso Contrário} \end{cases}$$

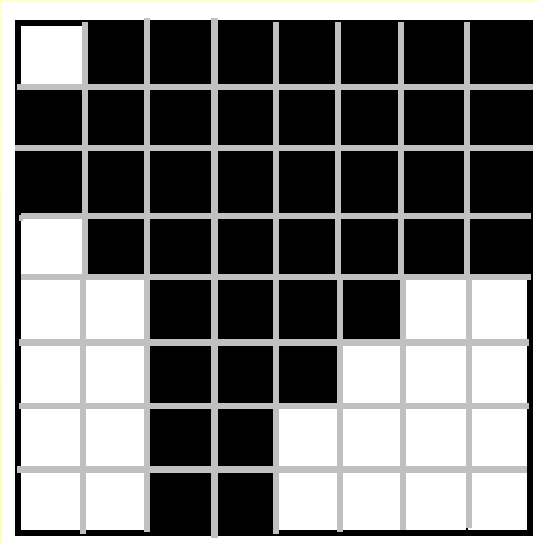


- ❑ Requer muito espaço de armazenamento

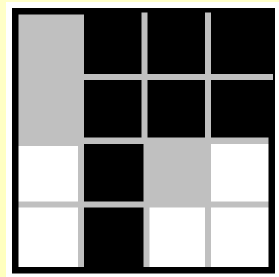
Neste caso, os Descritores são as coordenadas dos píxels da região.

3) Arvores Quadráticas: " QuadTrees "

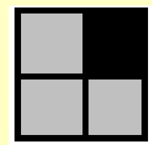
Representação Intermediária = Pirâmide



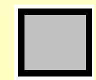
Nível 3



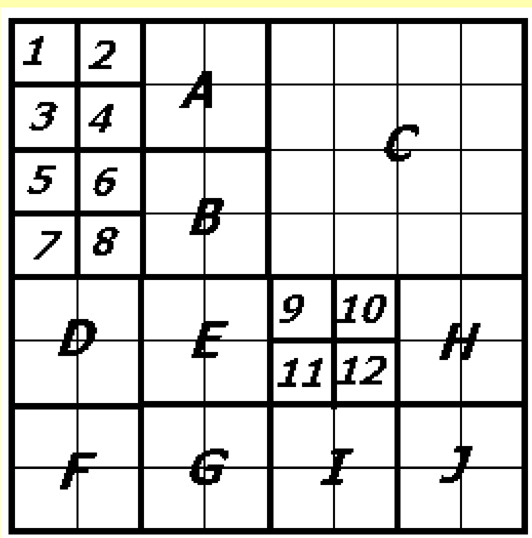
Nível 2

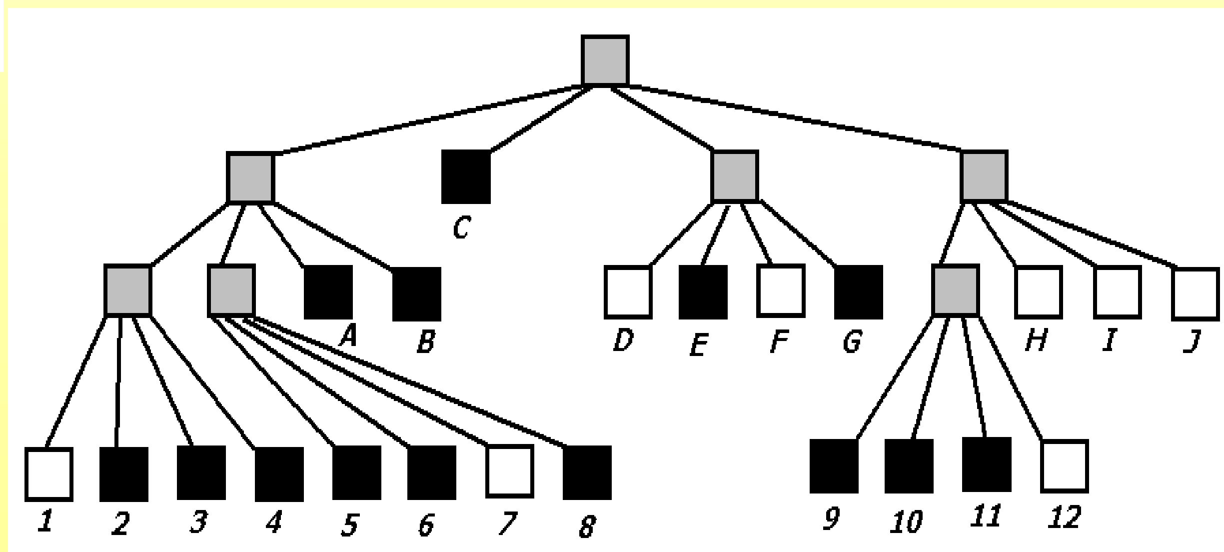


Nível 1



Nível 0





A descrição pode ser feita pelas coordenadas dos píxels em qualquer dos níveis.

Descritores de Região

1) Área de uma Região (A):

- A = Número de píxels contido dentro de sua fronteira.

2) Compacidade:

$$\boxed{C = \frac{P^2}{A}}$$

Onde P = Perímetro da fronteira e
A = Área da Região

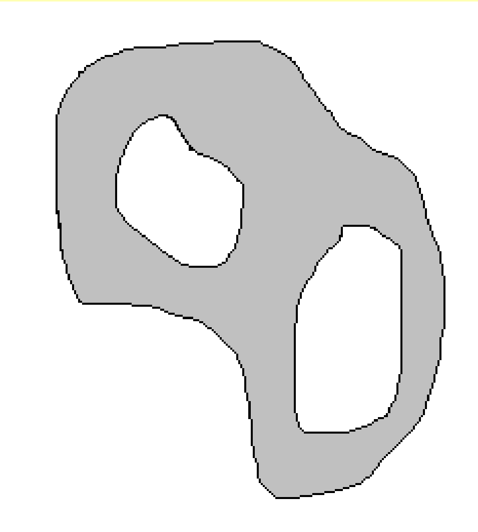
- A Compacidade é adimensional e insensível a mudanças de escala e orientação.

3) Descritores Topológicos:

- Úteis para descrições globais no plano de Imagem.

- Topologia é o estudo das propriedades de uma figura que não sejam afetadas por deformações, desde que não existam divisão ou fusão da figura.

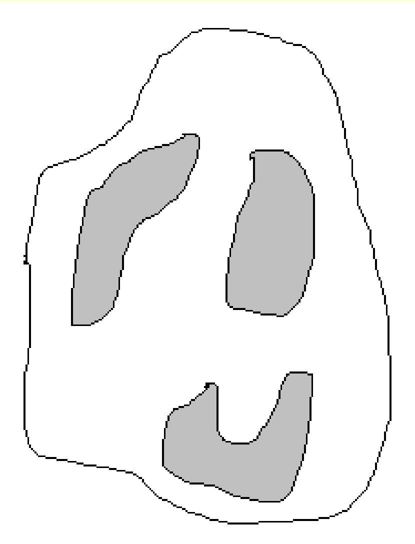
Número de Furos:



Região com 2 furos

Número de Componentes conectados:

Região com 3 componentes conectados



Número de Euler:

$$\boxed{E = C - H}$$

Onde: C = número de componentes Conectados
H = número de furos

E = 0

E = -1

4) Textura:

- Fornece medidas de propriedades como suavidade, rugosidade e regularidade.

Abordagens principais $\left\{ \begin{array}{l} \text{Estatística} \\ \text{Estrutural} \\ \text{Espectral} \\ \text{Análise Local} \end{array} \right.$

- A abordagem estatística caracteriza as Texturas como suave, áspera, granular, etc...
- A abordagem estrutural descreve as Texturas como arranjos de primitivas de imagem, tais como linhas regularmente espaçadas.
- A abordagem espectral baseia-se em propriedades do espectro de Fourier.
- A análise Local é baseada na distribuição dos píxels em torno da vizinhança de cada píxel (Texture Unit, LBP, Transformada Census)

Abordagem Estatística:

Moment	Expression	Measure of Texture
Mean	$m = \sum_{i=0}^{L-1} z_i p(z_i)$	A measure of average intensity.
Standard deviation	$\sigma = \sqrt{\mu_2(z)} = \sqrt{\sigma^2}$	A measure of average contrast.
Smoothness	$R = 1 - 1/(1 + \sigma^2)$	Measures the relative smoothness of the intensity in a region. R is 0 for a region of constant intensity and approaches 1 for regions with large excursions in the values of its intensity levels. In practice, the variance used in this measure is normalized to the range [0, 1] by dividing it by $(L-1)^2$.
Third moment	$\mu_3 = \sum_{i=0}^{L-1} (z_i - m)^3 p(z_i)$	Measures the skewness of a histogram. This measure is 0 for symmetric histograms, positive by histograms skewed to the right (about the mean) and negative for histograms skewed to the left. Values of this measure are brought into a range of values comparable to the other five measures by dividing μ_3 by $(L-1)^2$ also, which is the same divisor we used to normalize the variance.
Uniformity	$U = \sum_{i=0}^{L-1} p^2(z_i)$	Measures uniformity. This measure is maximum when all gray levels are equal (maximally uniform) and decreases from there.
Entropy	$e = -\sum_{i=0}^{L-1} p(z_i) \log_2 p(z_i)$	A measure of randomness.

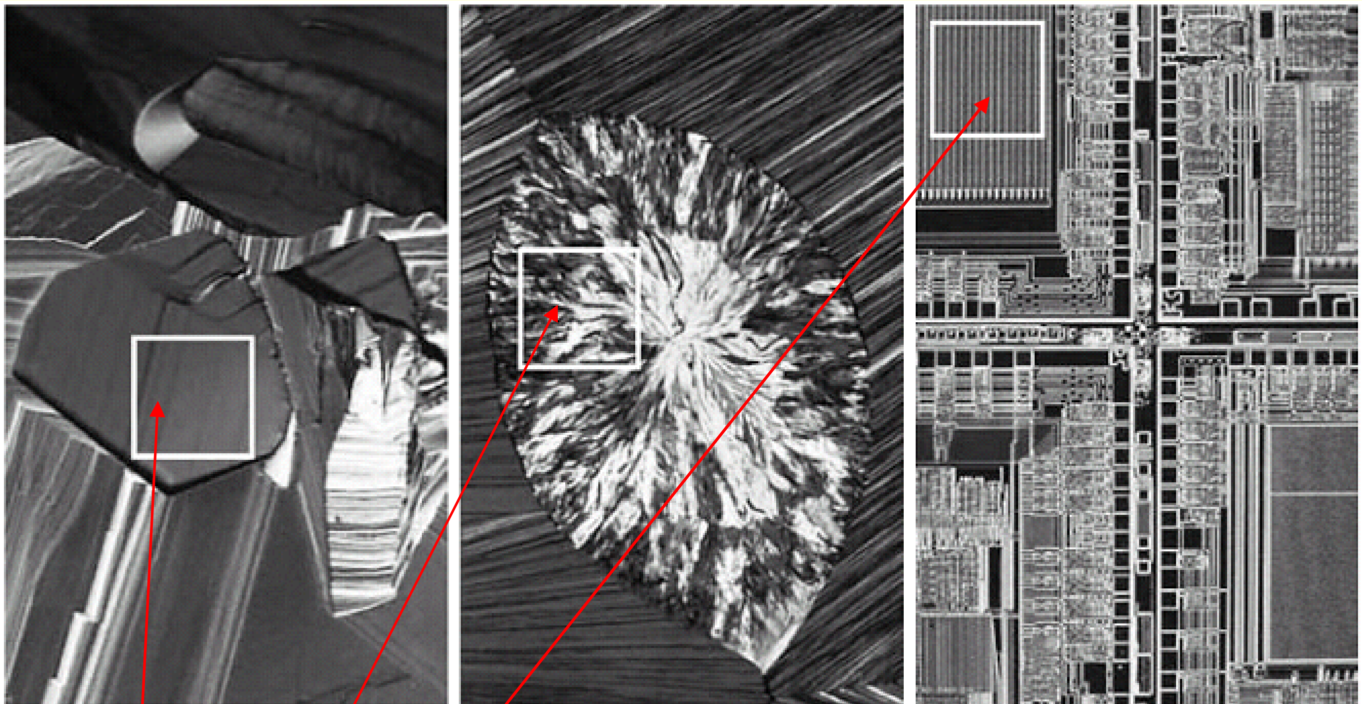
Alguns descritores de textura baseados no histograma de uma região.

Z_i → Intensidade dos pixels

P(z) →Histograma das intensidades

L → número dos possíveis níveis de cinza

Exemplo de valores de textura em diferentes imagens



a b c

FIGURE 11.19 The subimages shown represent, from left to right, smooth, coarse, and periodic texture. These are optical microscope images of a superconductor, human cholesterol, and a microprocessor. (Original images courtesy of Dr. Michael W. Davidson, Florida State University.)

Texture	Average Intensity	Average Contrast	R	Third Moment	Uniformity	Entropy
Smooth	87.02	11.17	0.002	−0.011	0.028	5.367
Coarse	119.93	73.89	0.078	2.074	0.005	7.842
Periodic	98.48	33.50	0.017	0.557	0.014	6.517

5) Momentos:

- O momento de ordem (p+q) de uma função contínua bi-dimensional é definido como:

$$\boxed{m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)\,dx\,dy}$$

para p,q = 0,1,2,......

$$m_{00} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^0 y^0 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

m_{00}= área da Região

$$m_{01} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^0 y^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\,dx\,dy$$

$$m_{10} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^1 y^0 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\,dx\,dy$$

m_{01} e m_{10} são as coordenadas do Centro de Massa da Região

Momentos Centrais:

- São Momentos centralizados em regiões e podem ser expressos como:

$$\boxed{\mu_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x,y)\,dx\,dy}$$

Onde: $\bar{x} = \dfrac{m_{10}}{m_{00}}$ e $\bar{y} = \dfrac{m_{01}}{m_{00}}$ São as coordenadas do Centro de Massa, normalizadas pela área da região.

Para uma Imagem Digital:

$$\boxed{\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x-\bar{x})^p (y-\bar{y})^q f(x,y)}$$

Momentos Centrais até a ordem 3:

$$\boxed{\mu_{00} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^0 (y - \bar{y})^0 f(x, y) = \sum_x \sum_y f(x, y) = m_{00}}$$

Ordem 1

$$\boxed{\mu_{10} = \mu_{01} = 0}$$

Ordem 2

$$\boxed{\mu_{20} = m_{20} - \bar{x} m_{10}}$$

$$\boxed{\mu_{02} = m_{02} - \bar{y} m_{01}}$$

$$\boxed{\mu_{11} = m_{11} - \bar{y} m_{10}}$$

Ordem 3

$$\boxed{\mu_{12} = m_{12} - 2\bar{y} m_{11} - \bar{x} m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{10}}$$

$$\boxed{\mu_{21} = m_{21} - 2\bar{x} m_{11} - \bar{y} m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{01}}$$

$$\boxed{\mu_{30} = m_{30} - 3\bar{x} m_{20} + 2\bar{x}^2 m_{10}}$$

$$\boxed{\mu_{03} = m_{03} - 3\bar{y} m_{02} + 2\bar{y}^2 m_{01}}$$

São Invariantes com relação à escala.

Momentos Invariantes:

- Conjunto de Momentos (Momentos Invariantes de Hu) que são relativamente invariantes à translação, rotação e escala.

Momentos Centrais Normalizados pela área:

$$\boxed{\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\gamma}}}$$ Onde: $$\boxed{\gamma = \frac{p+q}{2} + 1}$$ Para p+q=2,3,4,....

- Hu calculou 7 desses momentos.

- A experiência tem mostrado que os 7 Momentos Invariantes de Hu, são suficientes para descrever uma região independente da rotação, translação e escala.

Momentos Invariantes de Hu:

$$\boxed{\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}}$$

$$\boxed{\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2}$$

$$\boxed{\phi_3 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{21} - \eta_{03})^2}$$

$$\boxed{\phi_4 = (\eta_{30} + \eta_{12})^2 + (\eta_{21} + \eta_{03})^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi_5 = (\eta_{30} - 3\eta_{12})(\eta_{30} + \eta_{12})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + \\ (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{21} + \eta_{03})\left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right]\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + \\ 4\eta_{11}(\eta_{30} + \eta_{12})(\eta_{21} + \eta_{03})\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi_7 = (3\eta_{21} - \eta_{03})(\eta_{30} + \eta_{12})\left[(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{21} + \eta_{03})^2\right] + \\ (3\eta_{12} - \eta_{30})(\eta_{21} + \eta_{03})\left[3(\eta_{30} + \eta_{12})^2 - (\eta_{21} + \eta_{03})^2\right]\end{array}}$$

Exemplo:

Invariante	Imagem Original	Metade	Espelhado	Rotação 2^0	Rotação 45^0
ϕ_1	6,249	6,226	6,919	6,253	6,318
ϕ_2	17,180	16,954	16,955	17,270	16,803
ϕ_3	22,655	23,531	26,689	22,836	19,724
ϕ_4	22,919	24,236	26,901	23,130	20,437
ϕ_5	45,749	48,349	53,724	46,136	40,525
ϕ_6	31,830	32,916	37,134	32,068	29,315
ϕ_7	45,589	48,343	53,590	46,017	40,170